Poglavlje 1

Funkcije više varijabli

1.1 Domena

Jedno od osnovnih pitanja koje se može postaviti za realnu funkciju dvije varijable jest pitanje domene, tj. utvrđivanje područja u ravnini $\mathbb{R}^2$ na kojem je funkcija definirana. Često se pritom i skicira skup svih točaka domene u koordinatnom sustavu, jer sam eksplicitni zapis za domenu ne govori previše.

Funkcije koje ćemo mi promatrati kompozicije su nekoliko elementarnih funkcija, npr. korjenovanja, potenciranja, logaritamskih funkcija te trigonometrijskih i njima inverznih arkus funkcija.

Stoga ćemo se ukratko podsjetiti koje su domene tih funkcija. Pritom ćemo te funkcije promatrati kao funkcije jedne varijable. Naime, bitno je da se uoči *uvjet* koji mora vrijediti na argument funkcije koju promatramo, bila ta funkcija jedne ili više varijabli. Rješavanjem svih uvjeta dolazimo do domene zadane funkcije.

(1) $f(x) = \sqrt{x}$. Uvjet kojeg postavljamo je da je $x \geq 0$, odakle i dolazimo do domene $\mathcal{D}(f) = [0, \infty >$. Uvjet pamtimo kao "*podkorijenski izraz je nenegativan*".

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$. Jedini uvjet kojeg treba postaviti je $x \neq 0$, pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Općenito, funkcije potenciranja s pozitivnim cjelobrojnim potencijama $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ nemaju uvjeta na domenu, pa je u tom slučaju domena čitav $\mathbb{R}$, dok funkcije potenciranja s negativnim potencijama $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}_-$ imaju uvjet da je $x \neq 0$ (zbog razlomka, jer npr. $x^{-5} = \frac{1}{x^5} = (\frac{1}{x})^5$). Dakle, svu pažnju kod funkcija potenciranja cjelobrojnim potencijama treba usmjeriti samo na funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Uvjet kojeg pamtimo glasi: "*razlomak je različit od nule*".

(3) $f(x) = \log_a x$. Uvjet glasi: $x > 0$. Međutim, može se dogoditi da je zadana funkcija u kojoj logaritamska baza ovisi o funkcijskoj varijabli, kao npr. $f(x) = \log_x x^2$. U tom slučaju (što se baze tiče) moramo poštivati činjenicu da je baza strogo veća od nule i različita od jedinice, pa imamo uvjete $x > 0, x \neq 1$. Dakle, kod logaritamske funkcije postoje dva uvjeta, koja pamtimo kao "*argument je strogo pozitivan*" i "*baza je strogo pozitivna i različlita od jedinice*". Dalje, poznati je da eksponencijalna funkcija kao inverzna funkcija logaritamske funkcije nema uvjeta na domenu, tj. da je za $f(x) = a^x$ (uz $a > 0$ i $a \neq 1$!) domena jednaka čitavom $\mathbb{R}$.

(4) Kod trigonometrijskih funkcija, poznato je da funkcije $\sin x$ i $\cos x$ imaju za domenu čitav skup realnih brojeva, pa uvjeta na domenu *nema*. Međutim, kod funkcija $\tan x$ i $\cot x$ moramo obratiti pažnju na definiciju ovih funkcija, tj. na nazivnike: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, pa ćemo zbog (2) imati kod funkcije $\tan x$ uvjet $\cos x \neq 0$, a kod $\cot x$ uvjet $\sin x \neq 0$.

(5) Kod arkus funkcija poznati su uvjeti na domenu koji je određuju. Nas će u zadacima zanimati samo funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$. Za obje ove funkcije znamo da je domena dana s $\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$, tj. uvjet na x glasi $|x| \leq 1$. Dakle, uvjet na izraz koji se nalazi pod arcsin ili arccos funkcijom možemo pamtiti kao "*argument je po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak 1*".

Riješimo nekoliko primjera, ali sada određujući domenu funkcije dvije varijable.

Primjer 1 Odredite domenu funkcije $f(x, y) = \sqrt{x + 1 - \sqrt{x + y}}$ i rješenje predočite grafički u ravnini.

Rješenje: Najprije zbog "unutarnjeg" korijena moramo postaviti uvjet:

(1) $x + y \geq 0$,

a potom zbog "vanjskog" korijena

(2) $x + 1 - \sqrt{x + y} \geq 0$.

Rješavamo prvi uvjet. Imamo $y \geq -x$, što grafički možemo predstaviti područjem ravnine omeđenim odozdo pravcem s jednadžbom $y = -x$ (područje uključuje i sam pravac).

Dalje, drugi uvjet se rješava po slučajevima. Najprije napišimo $\sqrt{x + y} \leq x + 1$. Imamo

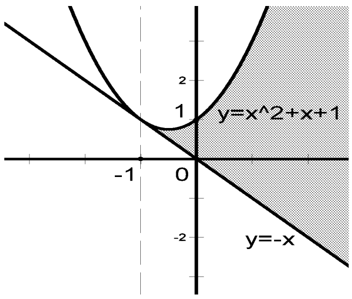
(a) ako je $x + 1 < 0$ (tj. $x < -1$), nejednažba nema rješenja (jer je s lijeve strane nenegativan, a s desne strane negativan broj).

(b) ako je $x + 1 \geq 0$ (tj. $x \geq -1$), možemo kvadrirati nejednadžbu, jer su obje strane pozitivne. Dobivamo $x + y \leq x^2 + 2x + 1$, odnosno $y \leq x^2 + x + 1$. Radi se o području odozgo omeđenom parabolom $y = x^2 + x + 1$ (a uključuje i samu parabolu).

Rješenje drugog uvjeta možemo ukratko napisati kao $y \leq x^2 + x + 1$ za $x \geq -1$.

Konačno rješenje se dobiva presijecanjem područja dobivenih rješavanjem oba uvjeta. Kako u drugom uvjetu nema rješenja za $x < -1$, to "lijevo" od pravca $x = -1$ nema niti jedne točke iz domene. Međutim, za $x \geq -1$ ("desno" od pravca $x = -1$) imamo uvjet $y \leq x^2 + x + 1$, ali i uvjet $y \geq -x$, pa je domena skup svih točaka koje se nalaze "ispod" parabole $y = x^2 + x + 1$, a "iznad" pravca $y = -x$ (uključujući i te dvije krivulje). Pažljivim crtanjem i računom vidi se da se ove dvije krivulje sijeku upravo u točki s $x-$koordinatom jednakom

-1, pa rješenje izgleda kao na slici (vidi str. 3.).



Slika 1.1: Grafički prikaz domene funkcije f

Primjer 2 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy}$ i rješenje predočite grafički u ravnini.

Rješenje: Kao i u prtehodnom primjeru, ovdje možemo postaviti dva uvjeta:
(1) $(1-x^2)(1-y^2) \geq 0$, vezano uz "unutarnji" korijen i
(2) $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy \geq 0$, vezano uz "vanjski" korijen i
Riješimo najprije prvi uvjet. Imamo dvije mogućnosti:

(a) $1-x^2 \geq 0$ i $1-y^2 \geq 0$, što daje $|x| \leq 1$ i $|y| \leq 1$. Rješenje je dano kao $\{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, što je kvadrat stranice 2 sa središtem (presjecištem dijagonala) u ishodištu. Stranice su uključene.

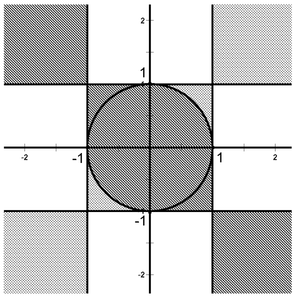
(b) $1-x^2 \leq 0$ i $1-y^2 \leq 0$, što daje $|x| \geq 1$ i $|y| \geq 1$. Rješenje je dano kao $\{(x,y) | x \leq -1 \text{ ili } x \geq 1, y \leq -1 \text{ ili } y \geq 1\}$.

Unija dva skupa dobivena pod (a) i (b) je rješenje prvog uvjeta.
Riješimo sada drugi uvjet. Ako nejednadžbu zapišemo u obliku
$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \geq xy$, opet imamo diskusiju:

(a) Ako je $xy < 0$, s lijeve strane nejednadžbe imamo korijen (koji je uvijek nenegativan), a s desne strane strogo negativan broj, pa je u ovom slučaju nejednakost očito zadovoljena. No, rješavali smo u skupu $xy < 0$, što riješeno daje točke drugog ($x < 0$, $y > 0$) i četvrtog kvadranta ($x > 0$, $y < 0$). Točke koje leže na koordinatnim osima su zbog stroge nejednakosti isključene.

(b) Ako je $xy \geq 0$, obje su strane nejednadžbe nenegativne, pa možemo kvadrirati nejednadžbu. Dobivamo nakon sređivanja $x^2 + y^2 \leq 1$, pa se radi o krugu sa središtem u ishodištu i radijusom 1. Preciznije, u skup točaka koje čine rješenje uključena je i sama kružnica. Kako smo ovaj slučaj rješavali u skupu točaka koje zadovoljavaju nejednadžbu $xy \geq 0$, vrijednit će to u prvom ($x \geq 0$, $y \geq 0$) i trećem ($x \leq 0$, $y \leq 0$) kvadrantu (ovog puta uključivši i točke koje leže na koordinatnim osima).

Konačno rješenje drugog uvjeta dano je kao dio unutar jedinične kružnice u prvom i trećem kvadrantu, odnosno kao cijeli drugi i četvrti kvadrant. Međutim, to rješenje moramo presjeći s rješenjem prvog uvjeta da dobijemo konačno rješenje. Ono je na donjoj slici označeno tamnosivo, uz napomenu da su sve rubne točke tog područja dio rješenja. Svjetlosivi dio dolazi od rješenja prvog uvjeta i služi samo za orijentaciju.



Slika 1.2: Grafički prikaz domene funkcije f

Zadatak 3 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{2x+y}+x-3}$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x+2-\sqrt{x+y+1}}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x+\sqrt{y-x}}$

(4) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$

Primjer 4 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{\frac{xy}{x-y}}-1\right)$.

Rješenje: Rješavamo dva uvjeta:

(1) $\frac{xy}{x-y} \geq 0$ (zbog korijena)

(2) $\sqrt{\frac{xy}{x-y}}-1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{x-y}} > 1 \Rightarrow \frac{xy}{x-y} > 1$ (zbog logaritma)

(3) $x \neq y$ (zbog nazivnika).

Očito drugi uvjet uključuje i prvi, pa je dovoljno riješiti samo njega. Imamo dvije mogućnosti:

(a) ako je $x-y > 0$ množenjem s nazivnikom znak nejednakosti se ne mijenja, pa imamo $xy > x-y$, tj. $y(x+1) > x$. Ako je $x+1 > 0$, dijeljenjem s tim izrazom dobivamo $y > \frac{x}{x+1}$. Ako je $x+1 < 0$, dijeljenjem dobivamo $y < \frac{x}{x+1}$.

(b) ako je $x-y < 0$ dobivamo $xy < x-y$, tj. $y(x+1) < x$. Ako je $x+1 > 0$, imamo $y < \frac{x}{x+1}$, dok za $x+1 < 0$ imamo $y > \frac{x}{x+1}$.

Još treba vidjeti što je s opcijom $x = -1$. Uvrštenjem u početnu nejednadžbu dobivamo

$\frac{-y}{-1-y} > 1 \Rightarrow \frac{1}{-1-y} > 0 \Rightarrow -1-y > 0 \Rightarrow y < -1$.
Pokušajte ovako izračunatu domenu funkcije prikazati u ravnini!

Zadatak 5 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x,y) = \ln(1 - y + \sqrt{x-3})$

(2) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2-4} - y + x)$

(3) $f(x,y) = \ln(1 - x - \sqrt{y-2x})$

Primjer 6 Odredite domenu funkcije
$f(x,y) = \left\{\log_{\frac{2}{3}}\left[\log_{1/3}(x^2-2x-2y+1)+2\right]\right\}^{-1}$.
Rješenje: Najprije zbog "unutarnjeg" logaritma zahtijevamo da bude
(1) $x^2-2x-2y+1>0$, a potom da zbog "vanjskog" bude
(2) $\log_{1/3}(x^2-2x-2y+1)+2>0$.
Riješimo najprije prvi uvjet: $0 < x^2-2x-2y+1 \Rightarrow y < \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.
Drugi uvjet sređivanjem daje
$\log_{1/3}(x^2-2x-2y+1) > -2 \Rightarrow x^2-2x-2y+1 < 9 \Rightarrow y > \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.
Zajedno prva dva uvjeta daju $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 < y < \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ (radi se o području odozdo omeđenom parabolom $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$, a odozgo parabolom $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ koje je ne uključuje niti jednu od tih parabola).
Osim toga, pojavljuje se zbog nazivnika (potencija -1) i treći uvjet
(3) $\log_{\frac{2}{3}}\left[\log_{1/3}(x^2-2x-2y+1)+2\right] \neq 0$. Imamo:
$\log_{1/3}(x^2-2x-2y+1)+2 \neq 1$
$\log_{1/3}(x^2-2x-2y+1) \neq -1$
$x^2-2x-2y+1 \neq 3$
$2y \neq x^2-2x-2$
$y \neq \frac{1}{2}x^2 - x - 1$
Dakle, iz rješenja treba isključiti točke koje se nalaze na paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.

Zadatak 7 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x,y) = \ln\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)^2\right]$

(2) $f(x,y) = \frac{1}{\log\left[\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2y)+2\right]}$

(3) $f(x,y) = \ln(\ln(y-x^2) - \ln(x+y^2))$

(4) $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y} + \frac{x-3y}{x+y}\right)$

Primjer 8 Odredite $\mathcal{D}(f)$ funkcije $f(x,y) = \sqrt{1 - \log_x^2 y}$ i rješenje predočite grafički.

Rješenje: U ovom zadatku osim diskusije po argumentu logaritamske i korjenske funkcije moramo uvjete postavljati i vezano uz bazu logaritamske funkcije, jer je ona ovisna o varijabli x.
Imamo sljedeće uvjete:

(1) $y > 0$, zbog logaritma

(2) $x > 0$ i $x \neq 1$, zbog logaritma

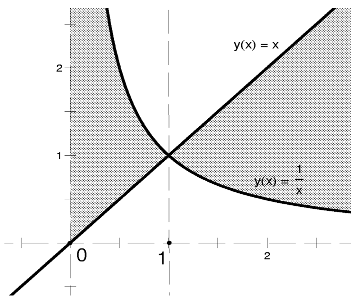
(3) $1 - \log_x^2 y \geq 0$, zbog korijena

Uzimajući u obzir uvjete (1) i (2), rješavamo treći uvjet:
$\log_x^2 y \leq 1$
$|\log_x y| \leq 1$
$-1 \leq \log_x y \leq 1$
Sada moramo napraviti diskusiju po bazi:

(a) ako je $0 < x < 1$, logaritamska funkcija je padajuća, pa djelovanjem inverzne funkcije na gornje dvije nejednadžbe mijenjamo znak nejednakosti:
$x^{-1} \geq y \geq x$.

(b) ako je $x > 1$, logaritamska funkcija je rastuća, pa djelovanjem inverzne funkcije na gornje dvije nejednadžbe znak nejednakosti ostaje isti:
$x^{-1} \leq y \leq x$.

Zbog prvog i drugog uvjeta radimo samo u prvom kvadrantu, i to isključivši zbog stroge nejednakosti točke koje se nalaze na koordinatnim osima, kao i bez pravca $x = 1$ (zbog baze). Opcije pod (a) i (b) govore da i u dijelu ravnine omeđenom pravcima $x = 0$ i $x = 1$, ali i onom omeđenom slijeva pravcem $x = 1$ rješenje predstavlja područje koje se nalazi između pravca $y = x$ i $y = \frac{1}{x}$. Rješenje uključuje i ove krivulje, a grafički je predstavljeno sljedećom slikom:



Slika 1.3: Grafički prikaz domene funkcije f

Zadatak 9 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x, y) = \sqrt{\log_y^2 x - 9}$

(2) $f(x,y) = \sqrt{\log_{x+y}(x-y-1)}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{1 - \log^2_{\frac{1}{2}} \frac{x-y}{x+y}}$

(4) $f(x,y) = \sqrt{\ln(y+x^2) - \ln(x-y^2)}$

(5) $f(x,y) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{y^2-4x}{x^2+y^2+1}}$

(6) $f(x,y) = \sqrt{\log_{\frac{y}{2}} \left(\frac{x}{2} - 1\right) - 2}$

(7) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 9y^2} + \ln(-x^2 + 9y^2 + 1)$

(8) $f(x,y) = \frac{\sqrt{8x-6y+x^2+y^2}}{\log(xy)}$

(9) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - \frac{1}{2})} + \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}}(-x)$

(10) $f(x,y) = \sqrt{\left|\frac{x-y}{x+2y}\right| - 1} \cdot \log(1 - |x| - |y|)$

(11) $f(x,y) = \frac{\ln(xy)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(-x^2-y^2+4x) + \log_3(x^2+y^2-2x)}}$

(12) $f(x,y) = \left[(x^2-y)^{\frac{1}{2}} - 2(x^2+y)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-y)^2}$

(13) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-4}{x+y}} + \ln(x^2-4)$

Primjer 10 Pokažite da je domena funkcije $f(x,y) = \arcsin \frac{x+y+2}{x+y+1} + \sqrt{3x+2} + \sqrt{3y+2}$ prazna.

Rješenje: Koristimo činjenicu da je domena arcsin funkcije dana s $[-1,1]$, što ovdje postaje jedan od uvjeta koje moramo postaviti:

(1) $-1 \leq \frac{x+y+2}{x+y+1} \leq 1$, zbog arcsin funkcije

(2) $3x+2 \geq 0$, zbog korijena

(3) $3y+2 \geq 0$, zbog korijena.

Drugi i treći uvjet je lako riješiti, dobivamo $x \geq -\frac{2}{3}$, $y \geq -\frac{2}{3}$. Riješimo sada prvi uvjet:

$-1 \leq \frac{x+y+2}{x+y+1} \leq 1$

$-1 \leq 1 + \frac{1}{x+y+1} \leq 1$

$-2 \leq \frac{1}{x+y+1} \leq 0$

Vidimo da je $\frac{1}{x+y+1} \leq 0$, što znači da imamo $x+y+1 < 0$, tj. $y < -x-1$. Zbog toga pri množenju s nazivnikom prva nejednadžba mijenja znak nejednakosti, pa imamo

$-2(x+y+1) \geq 1$

$x+y+1 \leq -\frac{1}{2}$

$y \leq -x - \frac{3}{2}$.

Dakle, konačno rješenje predstavlja područje određeno četirima nejednadžbama: $y \leq -x - \frac{3}{2}$, $y < -x - 1$, $x \geq -\frac{2}{3}$, $y \geq -\frac{2}{3}$. Iz treće nejednaždbe imamo $-x \leq \frac{2}{3}$, što uvrštanjem u prvu daje

$y \leq \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6} < -\frac{2}{3}$, što je u suprotnosti sa zadnjom nejednadžbom. Odavdje slijedi tvrdnja: $\mathcal{D}(f) = \emptyset$.

Do istog zaključka možete doći ako skicirate presjeke poluravnina koje predstavljaju rješenja gornjih nejednadžbi.

Primjer 11 Odredite domenu funkcije $f(x, y) = \ln [\pi^2 - 4 \arccos^2 \frac{x}{y}]$.

Rješenje: Postavljamo uvjete:

(1) $\pi^2 - 4 \arccos^2 \frac{x}{y} > 0$, zbog logaritamske funkcije

(2) $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1$, zbog arccos funkcije.

Rješavamo prvi uvjet:

$\pi^2 - 4 \arccos^2 \frac{x}{y} > 0$

$-4 \arccos^2 \frac{x}{y} > -\pi^2$

$\arccos^2 \frac{x}{y} < (\frac{\pi}{2})^2$

$|\arccos \frac{x}{y}| < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$

S obzirom na to da je skup vrijednosti arccos funkcije dan s $0 \leq \arccos \frac{x}{y} \leq \pi$, to je nejednakost $-\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{x}{y}$ uvijek zadovoljena. Međutim, moramo uzeti u obzir uvjet $0 \leq \arccos \frac{x}{y}$, pa sada imamo

$0 \leq \arccos \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$, što invertiranjem daje

$\cos 0 \geq \frac{x}{y} > \cos \frac{\pi}{2}$

$1 \geq \frac{x}{y} > 0$.

Vidimo sada da je ovaj sustav nejednadžbi "jači" od onog danom uvjetom (2), kojeg stoga nećemo niti rješavati. Rješavamo dakle do kraja uvjet (1), tj. njegove dvije nejednadžbe:

(a) $0 < \frac{x}{y}$: radi se o točkama prvog ($x > 0$ i $y > 0$) i trećeg kvadranta ($x < 0$ i $y < 0$), isključivši točke koje se nalaze na koordinatnim osima (zbog stroge nejednakosti).

(b) $\frac{x}{y} \leq 1$: ako je $y < 0$ imamo $x \geq y$, a za $y > 0$ je $x \leq y$. Dakle, ako se radi o trećem kvadrantu, rješenje predstavljaju točke koje zadovoljavaju nejednadžbu $y \leq x$, a ako se radi o prvom kvadrantu, rješenje su sve točke koje zadovoljavaju nejednadžbu $y \geq x$.

Konačno rješenje možemo zapisati ovako:

$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) | x < 0, y < 0, y \leq x\} \cup \{(x, y) | x > 0, y > 0, y \geq x\}$.

Zadatak 12 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x, y) = \log_2(\log_{2x+2y}(x^2 + y^2 - 7) - 1) \cdot \arccos \frac{x-2}{2}$

(2) $f(x,y) = \arcsin \left[1 - \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^2 \right]$

(3) $f(x,y) = \ln \left[\log^2_{\frac{2}{5}} (x+y) + \log_{\frac{2}{5}} (x+y) - 6 \right] + \arcsin \frac{(x+y)^2-1}{(x+y)^2+1}$

(4) $f(x,y) = \ln \left(\frac{x}{y} \right) + \sqrt{\arccos \frac{x-3y}{x+y}}$

1.2 Parcijalne derivacije

1.2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Definicija 1.2.1 *Neka je $f(x,y)$ funkcija dvije varijable. Ako y držimo konstantnim (npr. $y = y_0$), a x varijabilnim, onda možemo promatrati $f(x,y_0)$ kao funkciju varijable x. Ako je ta funkcija diferencijabilna u $x = x_0$, onda vrijednost derivacije te funkcije označavamo s $f_x(x_0,y_0)$ i zovemo je* ***parcijalna derivacija funkcije** f **po varijabli** x **u točki*** *(x_0,y_0). Ponekad se piše i $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} f(x,y)$ ili $\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0,y_0)$.*

Analogno definiramo i ***parcijalnu derivaciju funkcije** f **po varijabli** y **u točki*** *(x_0,y_0), u oznaci $f_y(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} f(x,y)$ ili $\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0,y_0)$.*

Ako parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x postoji za sve fiksne $y = y_0$ u svim točkama $x = x_0$ (x_0 i y_0 su takvi da je (x_0,y_0) iz domene funkcije f), onda funkciju $f \to f_x$ danu s $(x_0,y_0) \to f_x(x_0,y_0)$ zovemo ***parcijalna derivacija funkcije** f **po varijabli*** *x, u oznaci f_x ili $\frac{\partial f}{\partial x}$.*

Analogno definiramo i ***parcijalnu derivaciju funkcije** f **po varijabli*** *y, u oznaci f_y ili $\frac{\partial f}{\partial y}$.*

Ove derivacije zovemo jednim imenom **parcijalne derivacije prvog reda** funkcije f ili skraćeno **prve parcijalne derivacije** funkcije f.

Primjer 1 Izračunajte f_x i f_y funkcije $f(x,y) = x^3 - y + 2x^3y^2$, te nađite $f_x(1,4)$ i $f_y(1,-1)$.

Rješenje:

Da bismo našli parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x, promatramo gornju funkciju kao funkciju varijable x, dok varijablu y shvaćamo kao konstantu. Imamo

$f_x(x,y) = 3x^2 + 6x^2y^2$

$f_y(x,y) = -1 + 4x^3y.$

Da bismo izračunali vrijednost parcijalne derivacije po x ili po y u točki $(1,-1)$, potrebno je samo uvrstiti ove vrijednosti u izraz za f_x i f_y, redom. Imamo

$f_x(1,4) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1^2 \cdot 4^2 = 99$

$f_y(1,-1) = -1 + 4 \cdot 1^3 \cdot (-1) = -5.$

Pavilo za derivaciju kompozicije funkcija vrijedi i ovdje, kao što se može vidjeti u sljedećem primjeru:

Primjer 2 Izračunajte f_x i f_y funkcije $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

Rješenje: Računamo:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot f_x(\frac{y}{x}) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot f_y(\frac{y}{x}) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Zadatak 3 Izračunajte f_x i f_y sljedećih funkcija:

(1) $f(x,y) = 5x^3y^2 - 9$

(2) $f(x,y) = e^{x-2y}$

(3) $f(x,y) = \arcsin xy^2$

(4) $f(x,y) = x^4 \sin xy^3$

(5) $f(x,y) = \sin e^{x-y}$

(6) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

(7) $f(x,y) = x^3 \ln 1 + xy^{-\frac{3}{5}}$

(8) $f(x,y) = \sqrt{3x^5y - 7x^3y}$

(9) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

(10) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1}\frac{x}{y}$.

Zadatak 4 Izračunajte vrijednosti f_x i f_y funkcije $f(x,y)$ u danim točkama:

(1) $f(x,y) = 9 - x^2 - 7y^3$ u $(3,1)$

(2) $f(x,y) = x^2e^{xy}$ u $(1,1)$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2}$ u $(1,2)$

(4) $f(x,y) = x^2\cos xy$ u $(\frac{1}{2},\pi)$.

1.2.2 Parcijalne derivacije drugog reda

S obzirom da su parcijalne derivacije po x i po y (ako postoje) i same funkcije, možemo (uz neka ograničenja koja nas ovdje neće zanimati) izračunavati njihove parcijalne derivacije, bilo po x bilo po y:

(1) parcijalnu derivaciju po x funkcije f_x – oznaka f_{xx} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(2) parcijalnu derivaciju po y funkcije f_x – oznaka f_{yx} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(3) parcijalnu derivaciju po x funkcije f_y – oznaka f_{xy} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

(4) parcijalnu derivaciju po y funkcije f_y – oznaka f_{yy} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Ove derivacije zovemo jednim imenom **parcijalne derivacije drugog reda** funkcije f ili skraćeno **druge parcijalne derivacije** funkcije f.

Napomena:

Naravno, moguće je računati parcijalne derivacije drugih parcijalnih derivacija (tzv. parcijalne derivacije trećeg reda), pa i nastaviti ovaj postupak na računanje parcijalnih derivacija još viših redova. Međutim, nas to ovdje neće zanimati.

Primjer 1 Izračunajte parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x, y) = x^2y^3 + x^4y$.

Rješenje:

Najprije treba izračunati parcijalne derivacije prvog reda:

$f_x(x, y) = 2xy^3 + 4x^3y$

$f_y(x, y) = 3x^2y^2 + x^4$.

Sada možemo izračunati sve četiri parcijalne derivacije:

$f_{xx}(x, y) = 2y^3 + 12x^2y$

$f_{xy}(x, y) = 6xy^2 + 4x^3$

$f_{yx}(x, y) = 6xy^2 + 4x^3$

$f_{yy}(x, y) = 6x^2y$.

Napomena:

Primijetite da je u prethodnom primjeru $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, što je upravo tvrdnja Schwarzovog teorema. Naime, za dovoljno "lijepe" funkcije imat ćemo uvijek jednakost između "miješanih" parcijalnih derivacija, pa će u praksi biti dovoljno izračunati samo tri od četiri moguće parcijalne derivacije drugog reda.

Zadatak 2 Ponovite zadatke 3 i 4, ali sada računajući sve parcijalne derivacije drugog reda. Uvjerite se u ispravnost tvrdnje Schwarzovog teorema na ovim primjerima!

1.2.3 Parcijalne derivacije implicitno zadanih funkcija

Često u praksi nailazimo na funkcije kod kojih nije moguće eksplicitno izraziti funkcijsko pravilo u terminima obiju varijabli. Npr. kod funkcije $f(x, y)$ zadane implicitno s $x^2+f(x, y)\sin(xyf(x, y)) = 0$ nije moguće eksplicitno izraziti $f(x, y)$ kao funkciju u varijablama x i y. U takvim izrazima često označavamo $z := f(x, y)$ pa gornji izraz poprima oblik $x^2 + z\sin(xyz) = 0$. Sada *formalno* ovaj izraz shvaćamo kao funkciju $F(x, y, z)$ *tri* varijable x, y i z, iako je jasno da je z ovdje zapravo *funkcija* u varijablama x i y.

Nas će prije svega zanimati kako u takvim izrazima naći parcijalne derivacije prvog reda i potom izračunati vrijednosti tih derivacija u zadanoj točki. U našim oznakama to znači da želimo pronaći z_x i z_y.

Pri računanju parcijalnih derivacija vrijedi sljedeće pravilo:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Primjer 1 Izračunajte prve parcijalne derivacije funkcije $z = f(x, y)$ zadane implicitno s $xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$.

Rješenje: U našem slučaju je $F(x, y, z) = xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4$, pa je

$F_x(x, y, z) = z^2 + 2x + 2$

$F_y(x, y, z) = 2y$

$F_z(x, y, z) = 2xz$.

Sada je prema gornjoj formuli

$f_x(x, y) = -\frac{z^2+2x+2}{2xz}$

$f_y(x, y) = -\frac{2y}{2xz} = -\frac{y}{xz}$.

Zadatak 2 Izračunajte prve parcijalne derivacije funkcije $z = f(x, y)$ zadane implicitno s:

(1) $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 1$

(2) $\ln(2x^2 + y - z^3) = x$

(3) $x^2 + z \sin xyz = 0$

(4) $e^{xy} \sinh z - z^2 x + 1 = 0$.

Primjer 3 Izračunajte $z_{yx}(0, 0)$ ako je $z = \frac{x+y}{x+yz+2}$.

Rješenje: Iako na prvi pogled tako ne izgleda, $z = f(x, y)$ je implicitno zadana kao funkcija u varijablama x i y. Sređivanjem dobivamo:

$z(x + yz + 2) = x + y$

$zx + yz^2 + 2z - x - y = 0$.

Dakle, $F(x, y, z) := zx + yz^2 + 2z - x - y$, pa imamo

$F_x(x, y, z) = z - 1$

$F_z(x, y, z) = x + 2yz + 2$.

Stoga je $z_x = -\frac{z-1}{x+2yz+2}$.

Sada treba naći drugu derivaciju z_{yx}. Da bismo je izračunali, trebat će nam i z_y:

$F_y(x, y, z) = z^2 - 1$, pa je

$z_y = -\frac{z^2-1}{x+2yz+2}$.

Nama će trebati $z_y(0, 0)$. Ako je $x = y = 0$, onda uvrštavanjem u početni izraz za $z = f(x, y)$ imamo $z = 0$, pa je $z_y(0, 0) = \frac{1}{2}$.

Sada računamo $z_{yx}(1, 1)$, što je parcijalna derivacija po varijabli y funkcije z_x. No, kako z_x nije eksplicitno izražena kao funkcija po x i y, već se s desne strane izraza za z_x pojavljuje i sam z, morat ćemo pažljivo derivirati, shvaćajući z kao funkciju u varijabli y (jer parcijalno deriviramo po y). To znači da će se u izrazu za z_{yx} pojaviti z_y, kojeg smo gore već izračunali u točki $(0, 0)$. Imamo:

$z_{yx} = -\frac{z_y(x+2yz+2)-(z-1)(2z+2yz_y)}{(x+2yz+2)^2}$.

Za točku $(0, 0)$ (tj. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z_y(0, 0) = \frac{1}{2}$) je

$z_{yx}(0, 0) = -\frac{\frac{1}{2}\cdot 2-(-1)\cdot 0}{2^2}$, tj. $z_{xy}(0, 0) = -\frac{1}{4}$.

Zadatak 4 Izračunajte druge parcijalne derivacije funkcije $z = z(x, y)$ u točki $T(1, 0)$ zadane implicitno s $x^2 - 2x + z^2 - 4z + 1 = 0$, $z > 0$.

Zadatak 5 Neka su funkcije $u = u(x,y), v = v(x,y)$ zadane implicitno s $x = u\cos v,\ y = u\sin v$. Izračunajte $u_x(1,1),\ v_y(1,1)$.

Zadatak 6 Izračunajte $u_x(1,\frac{\pi}{4})$, $v_x(1,\frac{\pi}{4})$ za nenegativne funkcije $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ zadane implicitno s $x = u^2 + v^2$, $y = \arctan\frac{v}{u}$.

1.3 Tangencijalna ravnina

Proučavamo sljedeći problem: za plohu danu jednadžbom (implicitnom ili eksplicitnom) treba naći tangencijalnu ravninu koja prolazi danom točkom (na samoj plohi ili se nalazi izvan nje).

Formula koju ovdje koristimo glasi: neka je $T_0(x_0,y_0,z_0)$ neka točka *na plohi* zadanoj *eksplicitno* jednadžbom $z = f(x,y)$. Ako postoje $f_x(x_0,y_0)$ i $f_y(x_0,y_0)$ (i vrijede još neki uvjeti koji nas ovdje neće zanimati), onda ploha u točki T_0 ima tangencijalnu ravninu i njena jednadžba glasi

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Primjer 7 Izračunajte tangencijalnu ravninu plohe $z = x^2y$ u točki $(2,1,4)$.

Rješenje: Najprije provjeravamo da se točka $(2,1,4)$ doista nalazi naplohi $z = x^2y$: $4 = 2^2 \cdot 1$. Potom računamo vrijednosti prvih derivacija u točki $(2,1,4)$:

$z_x(x,y) = 2xy \Rightarrow z_x(2,1) = 4$

$z_y(x,y) = x^2 \Rightarrow z_y(2,1) = 4.$

Jednadžba ravnine dobiva se uvrštavanjem u gornju formulu:

$4(x-2) + 4(y-1) - (z-4) = 0 \Rightarrow 4x + 4y - z = 8.$

Napomena: Može se dogoditi da je potrebno naći tangencijalnu ravninu na plohu koja nije zadana eksplicitno. Za *implicitno* zadanu plohu $F(x,y,z) = 0$ koristimo sljedeću formulu za tangencijalnu ravninu u točki $(x_0, y_0, f(x_0,y_0) = z_0)$ *na plohi*:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

Primijetite da je formula za tangencijalnu ravninu na plohu zadanu eksplicitno dobivena iz ove formule ako se uzme da je u eksplicitnom slučaju funkcija F dana s $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.

Primjer 8 Odredite tangencijalnu ravninu plohe $\mathcal{P} \ldots xz^2 + x^2y = 6$ povučene u točki $M(x > 0, 2, 1)$.

Rješenje: Izračunajmo najprije koordinatu točke x. Kako se točka M nalazi na plohi, njene koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu plohe. Uvrštavanjem i korištenjem činjenice $x > 0$ imamo

$x + 2x^2 = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

Računamo dalje prve derivacije funkcije $F(x,y,z) := xz^2 + x^2y - 6$, uvrštavajući potom koordinate točke $M(\frac{3}{2},2,1)$:

$F_x(x,y,z) = z^2 + 2xy \Rightarrow F_x(\frac{3}{2},2,1) = 7$

$F_y(x,y,z) = x^2 \Rightarrow F_y(\frac{3}{2},2,1) = \frac{9}{4}$

$F_z(x,y,z) = 2xz \Rightarrow F_z(\frac{3}{2},2,1) = 3$

Jednadžba ravnine glasi:

$7(x-\frac{3}{2})+\frac{9}{4}(y-2)+3(z-1)=0 \Rightarrow 28x+9y+12z=72.$

Primjer 9 Na plohi $x^2+y^2-z^2-2x=8$ nađite točke u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s koordinatnom ravninom $y=0$.

Rješenje:

Tangencijalna ravnina na zadanu plohu će u nekoj točki (x_0,y_0,z_0) biti paralelna na ravninu $y=0$ ako su vektori normala tih ravnina kolinearni.

Nađimo najprije opći oblik tangencijalne ravnine na plohu $x^2+y^2-z^2-2x=8$ za proizvoljnu točku plohe (x_0,y_0,z_0). S obzirom da je ploha zadana implicitno, definiramo $F(x,y,z):=x^2+y^2-z^2-2x-8$ i računamo

$F_x(x,y,z)=2x-2 \Rightarrow F_x(x_0,y_0,z_0)=2x_0-2$

$F_y(x,y,z)=2y \Rightarrow F_y(x_0,y_0,z_0)=2y_0$

$F_z(x,y,z)=-2z \Rightarrow F_z(x_0,y_0,z_0)=-2z_0.$

Stoga jednadžba tangencijalne ravnine glasi

$(2x_0-2)(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0 \;\; /:2$

$(x_0-1)x+y_0y-z_0z-(x_0^2+y_0^2-z_0^2-2x_0)=x_0.$

Kako je (x_0,y_0,z_0) na plohi, ta točka zadovoljava jednadžbu plohe, tj. vrijedi $x_0^2+y_0^2-z_0^2-2x_0=8$, pa sređeni oblik jednadžbe tangencijalne ravnine glasi

$(x_0-1)x+y_0y-z_0z=8+x_0 \qquad (*)$

Zadano je da ova ravnina mora biti paralelna ravnini $y=0$, pa imamo kolinearnost među vektorima normala: $\frac{x_0-1}{0}=\frac{y_0}{1}=\frac{-z_0}{0}$. Odavdje izlazi $x_0=1$, $z_0=0$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe daje $y_0^2=9$. Imamo dva rješenja:

(1) $y_0=3$. Zajedno s $x_0=1$, $z_0=0$ imamo točku $(1,3,0)$. Uvrštanjem u $(*)$ dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine $3y=9$, tj. $y=3$.

(2) $y_0=-3$. Zajedno s $x_0=1$, $z_0=0$ imamo točku $(1,-3,0)$. Uvrštanjem u $(*)$ dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine $3y=-9$, tj. $y=-3$.

Zaključak je da se u dvije točke na plohi postiže uvjet paralelnosti tangencijalne ravnine s $y=0$. To su točke $(1,3,0)$ i $(1,-3,0)$, a tangencijalne ravnine su $y=3$ i $y=-3$, redom.

Zadatak 10 Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $\mathcal{P}\ldots z-xy=0$ koja je okomita na pravac $\frac{x}{2}=\frac{y-\pi}{1}=\frac{z+3}{1}$.

Zadatak 11 Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine plohe $x^2+2y^2+3z^2=1$ paralelne sa $2x+y+3z=1$.

Zadatak 12 Odredite ravninu tangencijalnu na elipsoid $x^2+2y^2+z^2=1$ koja je usporedna ravnini zadanoj jednadžbom $x-y+2z-\ln 2=0$.

Zadatak 13 Sfera Σ zadana je jednadžbom $x^2+y^2+z^2-1=0$. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na Σ koja sadrži točke $T_1(1,3,1)$, $T_2(2,1,1)$.

1.4 Račun približne vrijednosti

Slično kao kod funkcija jedne varijable, možemo pojam diferencijala posredno koristiti u svrhe računa približne vrijednosti.

Koristimo sljedeću formulu *linearne aproksimacije* za približnu vrijednost funkcije f u točki $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Napomena:

Ova se formula najčešće koristi za izračunavanje vrijednosti funkcije f u točkama koje se nalaze *dovoljno blizu* točkama čiju je funkcijsku vrijednost lako izračunati. Dakle, u pravilu su Δx i Δy "dovoljno" mali da stvarna vrijednost funkcije u točki odgovara aproksimativnoj vrijednosti danoj gornjom formulom.

Primjer 14 Izračunajte približno $\sqrt[3]{5.7 + \sqrt[4]{15.8}}$.

Rješenje: Kao i obično u zadacima s računom približne vrijednosti, potrebno je formirati funkciju koja opisuje gornji izraz. Ovdje će to očito biti funkcija $f(x, y)$ dviju varijabli dana s $f(x, y) = \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{y}}$. Točka s kojom radimo je $(5.7, 15.8)$, pa je $x_0 + \Delta x = 5.7$, $y_0 + \Delta y = 15.8$. Odavdje izlazi da je najprikladnije uzeti (biramo najbliže "lijepe" vrijednosti) $x_0 = 6$, $\Delta x = -0.3$ te $y_0 = 16$, $\Delta y = -0.2$. Računamo sve sumande koji su potrebni za desnu stranu formule:

$f(x_0, y_0) = f(6, 16) = \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{16}} = \sqrt[3]{6 + 2} = 2$

$f_x(x, y) = \frac{1}{3}(x + y^{\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f_x(6, 16) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$

$f_y(x, y) = \frac{1}{3}(x + y^{\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow f_y(6, 16) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{384}$

Sada je

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5.7 + \sqrt[4]{15.8}} &= f(5.7, 15.8) \approx \\ &\approx f(6, 16) + f_x(6, 16) \cdot (-0.3) + f_y(6, 16) \cdot (-0.2) = \\ &= 2 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{10} - \frac{1}{384} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3791}{1920}. \end{aligned}$$

Zadatak 15 Koristeći formulu za linearnu aproksimaciju izračunajte približno vrijednost izraza:

(1) $\sqrt{5.8 + \sqrt[3]{1 - 3.1^2}}$

(2) $\sqrt[3]{6.1 + \sqrt{3.98}}$

(3) $\frac{1.05^2}{\sqrt[3]{7.9 \cdot \sqrt[4]{1.05^3}}}$

Zadatak 16 Odredite približno $z(0.2, 0.9)$ ako je $z = z(x, y)$ zadana implicitno s $xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 28 = 0$.

Primjer 17 Izračunajte približno polumjer opisane kružnice pravokutnika stranica $a = 6.2$, $b = 7.8$.

Rješenje: Lako se vidi da za promjer $2r$ kružnice opisane pravokutniku vrijedi $(2r)^2 = a^2 + b^2$, pa je $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Stoga definiramo $r = r(a,b) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ da bude funkcijska ovisnost polumjera kružnice opisane pravokutniku stranica a i b. U našem slučaju treba izračunati $r(6.2, 7.8)$, pa definiramo $a_0 = 6$, $\Delta a = 0.2$, $b_0 = 8$, $\Delta b = -0.2$. Računamo:

$r(6,8) = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2} = 5$

$r_a(a,b) = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2a = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r_a(6,8) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$r_b(a,b) = \ldots = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r_b(6,8) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Sada je

$r(6.2, 7.8) \approx r(6,8) + r_a(6,8)\cdot(0.2) + r_b(6,8)\cdot(-0.2) = 5 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{124}{25}$.

Zadatak 18 Izračunajte približno polumjer kružnice sa središtem u ishodištu koja prolazi točkom $T(6.9, 24.2)$.

Zadatak 19 Izračunajte približno promjenu oplošja uspravne kvadratne prizme površine plašta $P = 48$ i obujma $V = 36$, ako se stranica poveća za 0.02, a visina smanji za 0.03.

Zadatak 20 Zatvoreni sanduk kojemu su vanjske dimenzije 10 cm, 8 cm i 6 cm napravljen je iz šperploča debljine 2 mm. Odredite približno količinu materijala utrošenog za izradu sanduka.

Zadatak 21 Izračunajte približno $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ (koristi se formula analogna gornjoj, ali za funkciju *triju* varijabli).

1.5 Lokalni ekstremi

Definicija 1.5.1 *Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima* ***lokalni maksimum*** *u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x,y) iz te okoline vrijedi $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0,y_0)* ***globalni maksimum*** *ako je $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ za sve točke (x,y) iz domene funkcije f.*

Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima ***lokalni minimum*** *u točki (x_0,y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x,y) iz te okoline vrijedi $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0,y_0)* ***globalni minimum*** *ako je $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ za sve točke (x,y) iz domene funkcije f.*

Lokalne minimume i maksimume funkcije f zovemo ***lokalni ekstremi*** *funkcije f, dok globalni minimum i maksimum funkcije f zovemo* ***globalni ekstremi*** *funkcije f.*

Ispitivanje lokalnih i globalnih ekstrema zadane funkcije jedan je od osnovnih zadataka u matematičkoj analizi. Kod funkcija dviju varijabli taj je postupak nešto složeniji nego kod funkcija jedne varijable i može se podijeliti u dva dijela. Najprije ćemo se baviti tzv. *nužnim uvjetom za postojanje lokalnog ekstrema*: ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki (x_0,y_0) i ako parcijalne derivacije prvog reda u toj točki postoje, onda mora vrijediti $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

Napomena:

Nužni uvjet za postojanje lokalnog ekstrema u praksi ćemo čitati "unatraške": da bismo našli sve točke u kojima se s obzirom na gornji kriterij uopće može postići lokalni ekstrem, moramo riješiti sustav jednadžbi $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Točke koje zadovoljavaju ovaj sustav shvaćamo kao *kandidate* među kojima ćemo potom tražiti lokalne ekstreme.

Nakon što pronađemo sve točke-kandidate, prelazimo na utvrđivanje koje od navedenih točaka predstavljaju lokalni minimum ili maksimum. Da bismo to utvrdili, potrebno je izračunati vrijednosti drugih parcijalnih derivacija u točkama-kandidatima. *Za svaku pojedinu* točku (x_0, y_0), kandidata za lokalni ekstrem, označimo:

$$A := f_{xx}(x_0, y_0), \quad B := f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0), \quad C := f_{yy}(x_0, y_0).$$

Dalje, označimo $\Delta := AC - B^2$

Vrijedi sljedeće pravilo:

Ako za točku (x_0, y_0) kandidata za lokalni ekstrem (točka zadovoljava nužan uvjet) vrijedi:

(1) $\Delta > 0$, onda se u (x_0, y_0) postiže lokalni ekstrem i to:

  (a) lokalni maksimum ako je $A < 0$

  (b) lokalni minimum ako je $A > 0$

(2) $\Delta < 0$, onda f ne postiže ekstrem u (x_0, y_0)

(3) $\Delta = 0$, onda ne možemo izvući nikakav zaključak o tome ima li f u točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem ili ne.

Napomena:

Slučaj (2) govori nešto više od same činjenice da u ispitivanoj točki funkcija ne postiže lokalni ekstrem. Naime, ako vrijedi $\Delta < 0$ u nekoj točki-kandidatu za lokalni ekstrem (x_0, y_0), onda u toj točki funkcija f ima tzv. *sedlo*, što je ekvivalent pojmu stacionarne točke kod funkcije jedne varijable. Naziv "sedlo" u ovom slučaju dobro dočarava izgled plohe funkcije f u okolini točke sedla.

Dalje, komentirajmo ukratko porijeklo veličine Δ. Vrijednosti parcijalnih derivacija u točki (x_0, y_0) mogu se organizirati u sljedeću matricu:

$$H := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

pa vidimo da je $\Delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, dakle upravo determinanta gornje matrice koju zovemo Hesseova matrica. Primijetimo da je $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ prema Schwarzovom teoremu, pa stoga na sporednoj dijagonali u Hesseovoj matrici imamo jednake vrijednosti koje u Δ čine faktor B^2.

Primjer 22 Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Rješenje: Najprije nalazimo prve parcijalne derivacije i rješavamo sustav $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$:

$f_x(x, y) = 4y - 4x^3 = 0$

$f_y(x, y) = 4x - 4y^3 = 0.$

Imamo $y = x^3$, $x = y^3$. Uvrštanjem $y = x^3$ u drugu jednadžbu dobivao $x = x^9$, što faktoriziranjem postaje

$x(x^8 - 1) = 0$

$x(x^4-1)(x^4+1)=0$
$x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=0$
$x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$

Zadnja dva faktora ne mogu biti jednaka nuli za realan x, pa nam ostaju tri rješenja: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Iz $y=x^3$ dobivamo $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=-1$, pa ukupno imamo tri točke kandidata za ekstrem: $(0,0)$, $(1,1)$ i $(-1,-1)$.

Za svaku od ovih točaka provodimo proceduru utvrđivanja koja od njih predstavlja lokalni ekstrem. Da bismo to izračunali, nađimo najprije druge parcijalne derivacije funkcije f:

$f_{xx}(x,y)=-12x^2$
$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=4$
$f_{yy}(x,y)=-12y^2.$

Uvrštavanjem vrijednosti x i y koordinata u ove izraze dobivat ćemo za pojedine točke-kandidate vrijednosti za A, B i C, redom.

Računamo:

(a) točka $(0,0)$: $A=f_{xx}(0,0)=0$, $B=f_{xy}(0,0)=4$, $C=f_{yy}(0,0)=0$, pa je $\Delta=AC-B^2=-16<0$. Dakle, radi se o sedlastoj točki.

(b) točka $(1,1)$: $A=f_{xx}(1,1)=-12$, $B=f_{xy}(1,1)=4$, $C=f_{yy}(1,1)=-12$, pa je $\Delta=AC-B^2=128>0$. Dakle, u $(1,1)$ postiže se lokalni ekstrem, i to maksimum, jer je $A=-12<0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(1,1)$ iznosi $f(1,1)=2$.

(c) točka $(-1,-1)$: $A=f_{xx}(-1,-1)=-12$, $B=f_{xy}(-1,-1)=4$, $C=f_{yy}(-1,-1)=-12$, pa je opet $\Delta=128>0$ i radi se o točki lokalnog maksimuma jer je $A=-12<0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(-1,-1)$ opet iznosi $f(-1,-1)=2$.

Zadatak 23 Odredite lokalne ekstreme funkcije:

(1) $f(x,y)=3x^2-2xy+y^2-8y$

(2) $f(x,y)=x^3-3xy-y^3$

(3) $f(x,y)=y^2+xy+3y+2x+3$

(4) $f(x,y)=xy-x^3-y^2$

(5) $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{2}{xy}$

(6) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$

(7) $f(x,y)=x^2+y-e^y$

(8) $f(x,y)=xe^y$

(9) $f(x,y)=e^x\sin y$

(10) $f(x,y)=y\sin x$

(11) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y.$

Primjer 24 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno s $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$.

Rješenje: Definiramo $F(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3$ i računamo:

$F_x(x, y, z) = 2x + z$

$F_y(x, y, z) = 4y$

$F_z(x, y, z) = x + 2z$.

Stoga je $z_x(x, y) = -\frac{2x+z}{x+2z}$, a $z_y(x, y) = -\frac{4y}{x+2z}$. Da bismo našli kandidate za lokalne ekstreme, moramo riješiti sustav $z_x(x, y) = z_y(x, y) = 0$, tj. $2x + z = 0 = 4y$. Dobivamo $y = 0$ i $z = -2x$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$ daje $x^2 = 1$, tj. $x_1 = 1$ ili $x_2 = -1$, pa je $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Imamo dvije točke koje su kandidati za ekstrem: $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

Izračunajmo sada druge parcijalne derivacije:

$z_{xx}(x, y) = -\frac{(2+z_x)(x+2z)-(2x+z)(1+2z_x)}{(x+2z)^2}$

$z_{yx}(x, y) = -\frac{z_y(x+2z)-(2x+z)\cdot 2z_y}{(x+2z)^2} = z_{xy}(x, y)$

$z_{yy}(x, y) = -\frac{4\cdot(x+2z)-4y\cdot 2z_y}{(x+2z)^2}$.

Sada računamo za svaku od dvije točke-kandidata radi li se o lokalnom ekstremu. Pritom ćemo koristiti činjenicu da je $z_x(1, 0) = z_y(1, 0) = 0$ i $z_x(-1, 0) = z_y(-1, 0) = 0$ (točke-kandidati zadovoljavaju nužan uvjet za ekstrem):

(a) točka $(1, 0)$ $(z = -2)$: $A = z_{xx}(1, 0) = \frac{2}{3}$, $B = z_{xy}(1, 0) = 0$, $C = z_{yy}(1, 0) = \frac{4}{3}$, pa je $\Delta = AC - B^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9} > 0$ i u točki $(1, 0)$ funkcija $z(x, y)$ postiže lokalni ekstrem. Kako je $A = \frac{2}{3} > 0$, radi se lokalnom minimumu koji iznosi $z = -2$.

(b) točka $(-1, 0, 2)$ $(z = 2)$: $A = z_{xx}(-1, 0) = -\frac{2}{3}$, $B = z_{xy}(-1, 0) = 0$, $C = z_{yy}(-1, 0) = -\frac{4}{3}$, pa je $\Delta = AC - B^2 = \frac{8}{9} > 0$ i u točki $(-1, 0)$ funkcija $z(x, y)$ postiže lokalni ekstrem. S obzirom da je $A = -\frac{2}{3} < 0$, radi se o lokalnom maksimumu koji iznosi $z = 2$.

Zadatak 25 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno:

(1) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - z = 0$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - z - 1 = 0$

(3) $z^3 - 3z(x^2 + y^2) - 27 = 0$

(4) $xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$

(5) $xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 28 = 0$

(6) $z^2 + 2z + x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$

(7) $z^2 + xz + x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0$.

Često se pojavljuju problemski zadaci u kojima je potrebno najprije konstruirati funkciju dviju varijabli, a potom izračunati ekstreme.

Primjer 26 Od svih kvadara obujma 27 nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Rješenje: Oplošje kvadra je općenito funkcija triju varijabli: ako s a, b i c označimo duljine stranica kvadra, onda je oplošje $O = 2(ab + ac + bc)$, dok je volumen $V = abc$ i iznosi 27. Sada iz $abc = 27$ imamo $c = \frac{27}{ab}$, što uvrštavanjem u izraz za oplošje daje

$$O = 2(ab + (a+b)c) = 2(ab + (a+b) \cdot \tfrac{27}{ab}) = 2(ab + \tfrac{27}{a} + \tfrac{27}{b}).$$

Definirajmo funkciju $f(a,b) := ab + \frac{27}{a} + \frac{27}{b}$. Očito će točke lokalnih minimuma ove funkcije davati i najmanje vrijednosti oplošja, jer je $O(a,b) = 2f(a,b)$. Stoga najprije nalazimo kandidate za ekstrem rješavajući sustav $f_a(a,b) = 0 = f_b(a,b)$. Imamo

$$f_a(a,b) = b - \tfrac{27}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2 b = 27 \text{ i zbog simetričnosti funkcije } ab^2 = 27.$$

Dijeljenjem ove dviju jednadžbi dobivamo $\frac{a^2 b}{ab^2} = 1$, tj. $a = b$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu imamo $a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow c = \frac{27}{3 \cdot 3} = 3$. S obzirom da je $(3,3)$ jedina točka kandidat za lokalni ekstrem, očito je da je rješenje zadatka kvadar sa sve tri stranice duljine 3, dakle kocka. Minimalni obujam iznosi 54.
Uvjerite se da se za točku $(3,3)$ doista radi o lokalnom minimumu funkcije f!

Zadatak 27 Među svim kvadrima oplošja 2 odredite onaj koji ima najveći obujam.

Zadatak 28 Na plohi $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ nađite točku najbližu točki $T(0,1,4)$.

Zadatak 29 Na elipsoidu $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ odredite točku najbližu ravnini $x + y + 2z = 12$.

Zadatak 30 U ravnini nađite točku sa svojstvom da je zbroj kvadrata udaljenosti od pravaca $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ najmanji.

Zadatak 31 Kroz točku $T(3,2,1)$ položite ravninu koja s koordinatnim ravninama zatvara piramidu najmanjeg obujma.

Zadatak 32 U polukuglu radijusa R upišite paralelepiped maksimalnog obujma kojem jedna strana leži u bazi polukugle.

Zadatak 33 U dio kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ koji se nalazi u prvom oktantu, upišite kvadar maksimalnog obujma tako da mu tri strane leže u koordinatnim ravninama.

Zadatak 34 U tetraedar određen točkama $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ upišite kvadar maksimalnog obujma tako da mu jedan brid leži na $z-$osi.